РАСЧЕТ ВИБРОИЗОЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. В. ОСИПОВА, инженер
(ЛЭИМПСС, ЦНИИСК им.В. А. Кучеренко, Москва)

В статье рассмотрен метод расчета вертикальных колебаний виброизолированных систем с тремя степенями свободы — метод с использованием передаточных функций. Получены формулы для передаточных функций в замкнутом виде. Практический пример (оборудование, рассматриваемое, как система с двумя степенями свободы, и динамический гаситель колебаний) рассчитан с помощью вышеуказанного метода и апробированного метода «нормальных» форм. Приведены графики колебаний нижней массы системы с гасителем и без.

Ключевые слова: виброизоляция, передаточная функция, метод «нормальных форм», динамический гаситель колебаний.

Один из наиболее распространенных способов снижения уровня воздействий, передаваемых от виброизолированного оборудования, рассматриваемого как система с двумя степенями свободы («оборудование с динамическими нагрузками + постамент»), на опорные конструкции, — использование дополнительного инерционного блока. Однако в некоторых случаях целесообразно использовать динамические гасители колебаний для оборудования с гармоническими нагрузками. Расчетные схемы для этих случаев — системы с 3-мя степенями свободы (рис.1).

Формулы для расчета виброизолированного оборудования при произвольных динамических нагрузках удобно строить с помощью метода, основанного на связи передаточных и импульсных переходных функций. В самом общем смысле передаточная функция является отношением «выходного» и «входного» параметров системы как функция некоторой переменной. В зависимости от характера внешних воздействий и особенностей колебательных систем в качестве «входного» и «выходного» параметров системы могут использоваться различные физические характеристики: перемещения, скорости, ускорения элементов, внешние и внутренние силы. При расчете систем виброзащиты чаще всего в качестве «входного» параметра используют характеристики силового воздействия (в данной статье, а также в [5]) или характеристики смещения основания при кинематическом воздействии (например, поверхностная скорость грунта в [3]), а в качестве «выходного» параметра — перемещение любой из масс (в данной статье и в [5]) или относительные скорости масс ([3]).

Передаточные функции могут быть получены в частотной ([5, 6, 7, 9]) и временной областях (в [4] — при расчете колебательных систем под действием сейсмических нагрузок с учетом нелинейных эффектов). В [8] передаточные функции строятся в частотно-временной плоскости. В рамках поставленной в данной статье задачи более удобным является представление передаточных функций в частотной области.

Система уравнений движения системы с 3-мя степенями свободы имеет вид:

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1+\left(1+2\nu_1\dfrac{d}{dt}\right)k_1(y_1-y_2)=q_1(t); \\ m_2\ddot{y}_2-\left(1+2\nu_1\dfrac{d}{dt}\right)k_1(y_1-y_2)+\left(1+2\nu_2\dfrac{d}{dt}\right)k_2(y_2-y_3)=q_2(t); \\ m_3\ddot{y}_3-\left(1+2\nu_2\dfrac{d}{dt}\right)k_2(y_2-y_3)+\left(1+2\nu_3\dfrac{d}{dt}\right)k_3y_3=q_3(t), \end{cases} \quad (1)$$

где m_i, v_i, k_i (i = 1, 2, 3) — инерциальные, демпфирующие и жесткостные характеристики системы соответственно; y_i — перемещения масс системы; $q_i(t)$ — внешняя нагрузка, приложенная к массам.

Обозначим $q_{1\ldots3}(t) = Q_{1\ldots3}e^{i\omega t}$, $y_{1\ldots3}(t) = Y_{1\ldots3}e^{i\omega t}$ и, подставив в (1), сократим на $e^{i\omega t}$. Получим:

$$\begin{cases} [(1+i2n_1)k_1-m_1\omega^2]Y_1-(1+i2n_1)k_1Y_2=Q_1 \\ -(1+i2n_1)k_1Y_1+[(1+i2n_1)k_1+(1+i2n_2)k_2-m_2\omega^2]Y_2-(1+i2n_2)k_2Y_3=Q_2 \\ -(1+i2n_2)k_2Y_2+[(1+i2n_2)k_2+(1+i2n_3)k_3-m_3\omega^2]Y_3=Q_3 \end{cases}$$

где $n_i = v_i\,\omega$; ω — частота внешнего воздействия.

Запишем решение системы (1), используя метод Крамера:

$$Y_1 = \Delta_1/\Delta;\ Y_2 = \Delta_2/\Delta;\ Y3 = \Delta_3/\Delta, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1+i2n_1)k_1-m_1\omega^2; & -(1+i2n_1)k_1; & 0; \\ -(1+i2n_1)k_1; & (1+i2n_1)k_1+(1+i2n_2)k_2-m_2\omega^2; & -(1+i2n_2)k_2; \\ 0; & -(1+i2n_2)k_2; & (1+i2n_2)k_2+(1+i2n_3)k_3-m_3\omega^2 \end{vmatrix}$$

— определитель системы, Δ_i — определитель, получающийся из Δ заменой i-го столбца (коэффициентов при Y_i) столбцом, составленным из свободных членов Q_i.

Раскрыв определитель и пренебрегая членами второго порядка малости, получим:

$$\Delta = D_0 + i^2D_1, \quad (3)$$

где $D_0 \approx (k_1 — m_1\omega^2)(k_1 + k_2 — m_2\omega^2)(k_2 + k_3 — m_3\omega^2) — k_1^{\,2}(k_2 + k_3\text{-m}_3\omega^2) — k_2^{\,2}(k_1 — m_1\omega^2)$;

$D_0 \approx [k_1n_1m_2m_3 + k_1n_1m_1m_3 + k_2n_2m_1m_3 + k_2n_2m_1m_2 + k_3n_3m_1m_2]\,\omega^4 — [k_1k_2(n_1 + n_2)(m_1 + m_2 + m_3) + k_1k_3(n_1 + n_3)(m_1 + m_2) + k_2k_3(n_2+ n_3)\,m_1]\,\omega^2 + k_1k_2k_3(n_1 + n_2 + n_3)$.

Значения Y_i из (2) представим в виде сумм $Y_i = \sum\limits_{j=1}^{3}\overline{H_{ij}}\cdot Q_j$,

где $\overline{H}_{ij}$ — комплексная передаточная функция, равная комплексному перемещению i-ой массы от единичного воздействия $q(t) = 1\,e^{i\omega t}$, приложенного к j-ой массе.

Запишем формулу для комплексной передаточной функции $\overline{H}_{11}$:

$\overline{H}_{11} = [m_2m_3\omega^4 — [(1 + i^2n_1)\,k_1m_3 + (1 + i^2n_2)\,k_2m_3 + (1 + i^2n_2)\,k_2m_2+ (1 + i^2n_3)\,k_3m_2]\,\omega^2 + k_1k_2(1 + i^2(n_1 + n_2)) + k_1k_3(1 + i^2(n_1 + n_3)) + k_2k_3(1 + i^2(n_2 + n_3))]/(D_0 + i^2D_1)$.

Затем преобразуем ее, выделив действительную часть и пренебрегая членами второго порядка малости:

$$H_{11} = \mathrm{Re}\,(\overline{H}_{11}) = [(k_1 + k_2 — m_2\omega^2)(k_2 + k_3 — m_3\omega^2) — k_2^{\,2}]/D_0, \quad (4)$$

где H_{11} — передаточная функция без учета демпфирования.

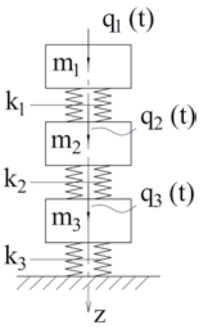


Рис.1. Система с 3-мя степенями свободы

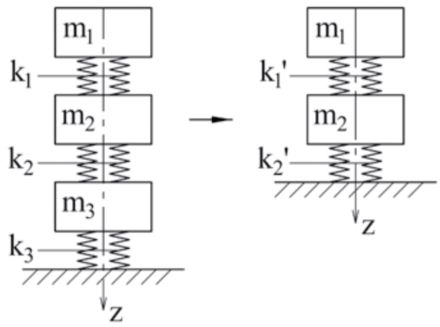


Рис.2. Переход от системы с 3-мя степенями свободы к системе с 2-мя степенями свободы

Аналогично получим остальные передаточные функции:

$H_{12} = H_{21} = [k_1 (k_2 + k_3 — m_3\omega^2)]/D_0$; (5)

$H_{13} = H_{31} = k_1k_2/D_0$; (6)

$H_{22} = [(k_1 — m_1\omega^2) (k_2 + k_3 — m_3\omega^2)]/D_0$; (7)

$H_{23} = H_{32} = [k_2 (k_1 — m_1\omega^2)]/D_0$; (8)

$H_{33} = [(k_1 — m_1\omega^2)] (k_1 + k_2 — m_2\omega^2) — k_1^2]/D_0$. (9)

Трофимов А. Н. в [1] рассмотрел некоторые случаи кинематической и силовой виброизоляции. В частности, им была получена формула передаточной функции для 2-ой массы при действии на ту же массу силы Q_2. Эта формула с точностью до обозначений полностью совпадает с (7).

Получим передаточные функции для системы с 2-мя степенями свободы как для частного случая системы с 3-мя степенями свободы.

Условия, позволяющие перейти к частному случаю:

$m_3 = 0$; $k_1' = k_1$; $k_2' = (k_2 \cdot k_3) / (k_2 + k_3)$.

Запишем для примера формулу для H_{11}:

$H_{11} = (k_1' + k_2' — m_2\omega^2) / [D_0 / (k_2 + k_3)]$. (10)

В дальнейшем характеристические уравнения для систем с двумя и тремя степенями свободы будем обозначать $D_0\,(2DOF)$ и $D_0\,(3DOF)$.

Преобразуем выражение в знаменателе (10):

$D_0\,(3DOF)/(k_2 + k_3) = D_0\,(2DOF)$. (11)

Формула (10) с учетом (11) полностью совпадает с формулой для H_{11} системы с 2-мя степенями свободы [2]. Аналогично были проверены формулы (5) и (7).

Собственные частоты колебаний системы с 3-мя степенями свободы p_1, p_2, p_3 определим, подставляя в выражение для $D_0 \omega = p$ и приравнивая $D_0\,(p)$ к нулю.

Запишем D_0 в виде:

$D_0 = m_1m_2m_3\,(\omega^2 — p_1^2)\,(\omega^2 — p_2^2)\,(\omega^2 — p_3^2)$.

Передаточные функции (4) — (9) удобно представить в виде сумм простых дробей. В частности для $H_{12} = H_{21}$ (5) получаем:

$$H_{12} = H_{21} = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{k_1\left(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2\right)\cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2}, \qquad (12)$$

где $B = m_1m_2m_3\,(p_3^2 — p_2^2)\,(p_3^2 — p_1^2)\,(p_2^2 — p_1^2)$;

$R(s) = p^2_{1+\mathrm{Rem}(s,3)} — p^2_{1+\mathrm{Rem}(s+1,3)}$,

$Rem\,(s, 3)$ — остаток от деления номера собственной формы s на 3.

По существу, формула (12) представляет собой разложение передаточной функции по формам собственных колебаний системы.

Введем в знаменатель (12) диссипативные члены. Получим:

$$\overline{H_{12}}(\omega) = \overline{H_{21}}(\omega) = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{k_1\left(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2\right)\cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s^2}. \qquad (13)$$

По аналогии с (13) запишем:

$$\overline{H_{11}}(\omega) = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{\left[\left(k_1 + k_2 - m_2 p_s^2\right)\left(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2\right) - k_2^2\right]\cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s^2}; \qquad (14)$$

$$\overline{H_{13}}(\omega) = \overline{H_{31}}(\omega) = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{k_1 k_2 \cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s^2}; \qquad (15)$$

$$\overline{H_{22}}(\omega) = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{\left(k_1 - m_1 p_s^2\right)\left(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2\right)\cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s^2}; \qquad (16)$$

$$\overline{H_{23}}(\omega) = \overline{H_{32}}(\omega) = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{k_2\left(k_1 - m_1 p_s^2\right)\cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s^2}; \qquad (17)$$

$$\overline{H_{33}}(\omega) = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{\left[\left(k_1 - m_1 p_s^2\right)\left(k_1 + k_2 - m_2 p_s^2\right) - k_1^2\right]\cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s^2}, \qquad (18)$$

где γ_s — диссипативные коэффициенты по формам собственных колебаний системы.

В качестве примера определим перемещение массы m_3 при действии на массу m_2 гармонической силы $Q_2\cos\,(\omega t)$:

$$y_3(t) = Q_2\,\mathrm{Re}\left[\overline{H_{32}}(\omega)e^{i\omega t}\right] = \frac{Q_2}{B}\sum_{s=1}^{3}\frac{k_2\left(k_1 - m_1 p_s^2\right)\cdot R(s)}{p_s^2 A_s}\cos\left(\omega t - \varphi_s\right), \qquad (19)$$

где $A_s = \sqrt{\left(1 - \omega^2 / p_s^2\right)^2 + \gamma_s^2}$; $tg\varphi_s = \gamma_s / [1 - \omega^2 / p_s^2]$.

Мнимая часть решения (19) соответствует нагрузке $Q_2\sin\,(\omega t)$.

В качестве примера была рассмотрена виброизолированная система с 3-мя степенями свободы (m_2 — оборудование, m_3 — постамент) с динамическим гасителем колебаний (масса m_1): Q_0 = 350 кН и ω = 60 рад/с — амплитуда и частота внешней нагрузки соответственно; m_2 = 6 т; m_3 = 5 т — инерционные характеристики системы без гасителя; k_2 = 4,210³ кН/м; k_3 = 210³ кН/м — жесткостные характеристики системы; γ_s = 0,1; s = 1, 2, 3 — коэффициенты демпфирования.

Задаваясь жесткостью упругого элемента под гасителем k_1 = 3,510³ кН/м, массу гасителя определим из условия снижения динамической нагрузки, передающейся на основание. Приравнивая к нулю числитель в (8), массу m_1 определим по формуле:

$m_1 = k_1/\omega^2 = 0.972$ т.

Частоты собственных колебаний системы равны:

p_1 = 11,88 рад/с; p_2 = 40,60 рад/с; p_3 = 65,83 рад/с.

При расчете виброизолированной системы с гасителем и без использовались передаточные функции, приведенные выше. Для проверки результатов исследуемая система была также рассчитана с помощью метода «нормальных форм» [2]. Полученные значения перемещений совпали с большой точностью.

На рис.3 приведены графики перемещений нижней массы (m_3) для системы с гасителем и без.

Снижение уровня перемещений нижней массы при использовании динамического гасителя составило:

(7,834 10⁻³ м)/(3,069 10⁻³ м) = 2,55.

Выводы. Полученные формулы передаточных функций позволяют в замкнутом виде определить перемещения масс системы с тремя степенями свободы при действии гармонической нагрузки на одну из масс, оценить эффектив-

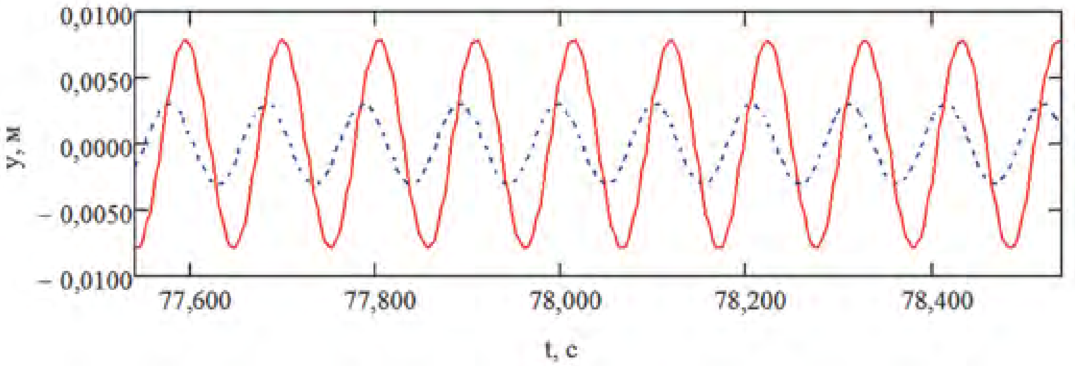


Рис.3. Перемещения нижней массы для различных расчетных схем виброизолированной системы (красная сплошная линия — система без гасителя; синяя пунктирная линия — система с гасителем)

ность виброизоляции систем с двумя степенями свободы с применением динамического гасителя колебаний или дополнительного инерционного блока.

Для систем с малым числом степеней свободы этот метод является менее трудоемким, чем выше упомянутый метод «нормальных форм» [2].

Литература

1. Трофимов А. Н. О построении структурных моделей виброзащитных систем с динамическим гасителем. // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. № 8.

2. Чернов Ю. Т. Вибрации строительных конструкций. (Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям): Научное издание. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство АСВ. 2011. 384 с.

3. Shi Zhan-Jie, Tian Gang, Shen Hong-Lei, Yin Xi-Ling. A Theoretical Study on the 3-Degree Freedom Geophone Coupling System for Areas with Limestone Outcrops. // Chinese Journal of Geophysics. Vol.53. No.3. 2010. PP.440-454.

4. Chen Z., Trombetts N. W., Hutchinson T. C., Mason H. B., Bray J. D., and Kutter B. L. Seismic System Identification Using Centrifuge-based Soil-Structure Interaction Test Data. // Journal of Earthquake Engineering. 17: 469-496. 2013.

5. Royston T. J., Singh R. Periodic Response of Mechanical Systems with Local Non-Linearities Using an Enhanced Galerkin Technique. // Journal of Sound and Vibration. 1996. 194 (2). PP.243-263.

6. He S., Rock T., Singh R. Construction of Semianalytical Solutions to Spur Gear Dynamics Given Periodic Mesh Stiffness and Sliding Friction Functions. // Journal of Mechanical Design. December 2008. Vol.130/122601-9.

7. Takewaki I., Fujita K., Yamamoto K., Takabatake H. Smart Passive Damper Control for Greater Building Earthquake Resilience in Sustainable Cities. // Sustainable Cities and Society. 2011. 1 (1): 3-15.

8. Fujita K., Takewaki I. Property of Critical Excitation for Moment-Resisting Frames Subjected to Horizontal and Vertical Simultaneous Ground Motion. // Journal of Zhejiang University — Science A (2009), 10 (11): 1561-1572.

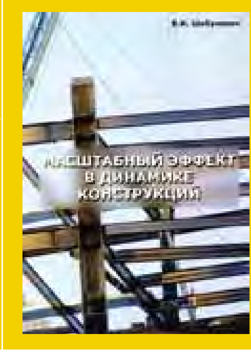
9. Елисеев С. В., Паршута Е. А., Большаков Р. С. Передаточные функции механической колебательной системы. Возможности оценки приведенной жесткости. // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 1. С. 11-18.

Материал хранится в ОАО «НИЦ «Строительство»,
ЦНИИСК им.В. А. Кучеренко по адресу:
109428, Москва, 2-я Институтская ул., д.6.
E-mail: mariaosipova3@gmail.com.

КНИЖНЫЕ НОВИНКИ

МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ В ДИНАМИКЕ КОНСТРУКЦИЙ
В. И. Шабуневич

— М.: ТрансЛит. 2013. 72 с.
ISBN 978-5-94976-467-1
Формат — 60x84/16 (143x205 мм)
Тираж 300 экз.
Переплет — Мягкая обложка



В данной работе на примерах динамических расчетов по методу конечных элементов (МКЭ) идентичных моделей образцов и тел разного масштаба показана новая интерпретация физической основы масштабного эффекта.
А также продемонстрирована возможность многочисленных важных применений такой интерпретации, позволяющая глубже понять сущность происходящих явлений при динамическом нагружении объектов, вплоть до их разрушения.

http://www.ozon.ru/context/detail/id/19904319/