



**М.В. ОСИПОВА,**  
инженер  
ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко

## МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ КАК СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

В статье представлен метод расчета виброизолированных систем, рассматриваемых как системы с тремя степенями свободы, на динамические нагрузки, возникающие в переходных режимах работы оборудования с гармоническими нагрузками. Алгоритм строится с помощью импульсных переходных функций, представляющих собой реакции системы на единичный импульс. При построении этих функций использовались зависимости для передаточных функций, полученные автором ранее. В основе алгоритма лежит метод, предложенный профессором Ю.Т. Черновым. Примеры расчета показали устойчивость и сходимость метода. Аналогичный подход можно использовать при расчете виброизолированных систем на произвольную нагрузку, используя приведенные в статье формулы для импульсных переходных функций.

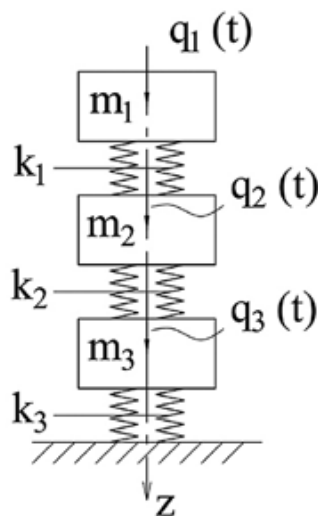
**Ключевые слова:** виброзащита, виброизоляция, импульсная переходная функция, передаточная функция, динамический гаситель колебаний, дополнительный инерционный блок, интеграл Дюамеля, переходные режимы.

При проектировании фундаментов виброактивного оборудования с гармоническими нагрузками (грохоты, вентиляторы, дизели, металлообрабатывающие станки и др.) широко применяются методы виброзащиты, в частности виброизоляция. При подборе параметров виброизоляции такого оборудования важно оценивать ее эффективность при работе оборудования не только в стационарных, но и в переходных режимах, что в общем случае ставит задачу расчета виброизолированных систем на произвольные нагрузки.

Если оборудование, виброизолированное по стандартной схеме, можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы (например, «оборудование с динамическими нагрузками + постамент»), то при дополнительном использовании распространенных приемов виброизоляции — дополнительного инерционного блока или динамического га-

сителя колебаний, возникает необходимость расчета систем с тремя степенями свободы.

Расчетная схема системы с тремя степенями свободы представлена на рис. 1.



**Рисунок 1** — Система с тремя степенями свободы

Решение системы уравнений движения строится с использованием импульсных переходных функций (ИПФ) в форме интегралов Дюамеля.

Формулы для импульсных переходных функций (ИПФ) были получены на основании известных соотношений между передаточными и импульсными переходными функциями для линейных динамических систем [1, 2]. В соответствии с этими соотношениями каждой составляющей передаточной функции вида

$$\frac{1}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s} = \frac{1}{p_s^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{p_s^2} + i\gamma_s \right)},$$

где  $p_s$  — частота собственных колебаний системы по  $s$ -ой форме собственных колебаний;

$\omega$  — частота внешнего воздействия;

$i$  — «мнимая» единица;

$\gamma_s$  — коэффициент демпфирования по  $s$ -ой форме, соответствует составляющая импульсной переходной функции

$$k_{us}(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}}}{p_s^*} \sin(p_s^* t), \quad (1)$$

где  $p_s^* = p_s \sqrt{1 - p_s^2 (\gamma_s / (2\omega))^2}$  — собственная частота колебаний системы с учетом демпфирования.

Формулы для передаточных функций при вертикальных колебаниях систем с тремя степенями свободы были получены автором ранее [3].

Полученные в результате преобразований формулы для импульсных переходных функций имеют следующий вид:

$$k_{u11}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{[(k_1 + k_2 - m_2 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2) - k_2^2]}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (2)$$

$$k_{u12}(t) = k_{u21}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{k_1(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (3)$$

$$k_{u13}(t) = k_{u31}(t) = \frac{k_1 k_2}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{1}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (4)$$

$$k_{u22}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (5)$$

$$k_{u23}(t) = k_{u32}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{k_2(k_1 - m_1 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (6)$$

$$k_{u33}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{[(k_1 - m_1 p_s^2)(k_1 + k_2 - m_2 p_s^2) - k_1^2]}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (7)$$

где  $B = m_1 m_2 m_3 (p_3^2 - p_2^2)(p_2^2 - p_1^2)(p_3^2 - p_1^2)$ ;

$m_1, m_2, m_3$  — инерционные характеристики системы;

$k_1, k_2, k_3$  — жесткостные характеристики системы;

$$R(s) = p_{1+\text{Rem}(s,3)}^2 - p_{1+\text{Rem}(s+1,3)}^2$$

$\text{Rem}(s,3)$  — остаток от деления номера собственной формы  $s$  на 3.

Для общего случая произвольного воздействия на каждую из масс системы перемещения масс системы определяются с помощью интеграла Дюамеля:

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^3 \int_0^t q_j(\tau) k_{ij}(t-\tau) d\tau. \quad (8)$$

В качестве расчетного примера был выполнен подбор наиболее эффективной виброизолированной системы, рассматриваемой как система с тремя степенями свободы, для оборудования, установленного на постамент. Характеристики оборудования, постамента и элементов крепления следующие: масса оборудования — 10 000 кг; масса постамента — 5 000 кг;  $5 \cdot 10^3$  кН/м — жесткость элементов крепления оборудования к постаменту;  $2 \cdot 10^3$  кН/м — жесткость элементов крепления постамента к опорным конструкциям.

Были приняты следующие параметры внешней нагрузки:  $Q_0 = 350$  кН/м и  $\omega = 60$  рад/с — амплитуда и частота внешней нагрузки соответственно.

В качестве первого варианта рассматривалась система с динамическим гасителем колебаний (масса  $m_1$  — динамический гаситель;  $m_2$  — оборудование;  $m_3$  — постамент). Жесткость упругих элементов гасителя принималась равной  $k_1 = 4 \cdot 10^3$  кН/м; масса гасителя  $m_1$  была определена из условия минимума динамической нагрузки, передающейся от виброизолированной системы на опорные конструкции (при эксплуатационном режиме нагрузки), по формуле  $m_1 = k_1 / \omega^2 = 647$  кг.

Также были выполнены расчеты системы с гасителем для ряда других значений массы гасителя:  $m_1 = 500; 1\ 000; 2\ 000; 3\ 000; 4\ 000; 5\ 000$  кг.

В качестве второго варианта виброизоляции рассматривалась система с дополнительным инерционным блоком (масса  $m_1$  расчетной схемы — оборудование;  $m_2$  — инерционный блок;  $m_3$  — постамент). Жесткость упругих элементов под инерционным блоком была принята равной  $k_2 = 3,5 \cdot 10^3$  кН/м. Были выполнены расчеты для ряда систем с различными массами дополнительного инерционного блока:  $m_2 = 1\ 000; 2\ 000; 3\ 000; 4\ 000; 5\ 000$  кг.

Во всех расчетных схемах демпфирование учитывалось согласно модифицированной гипотезе Фойгта, значения коэффициентов демпфирования принимались равными  $\gamma_s = 0,1; s = 1, 2, 3$  — номера собственных форм.

Для всех расчетных схем выполнялся расчет для эксплуатационного и переходных режимов работы оборудования. В переходных режимах работы машин внешняя нагрузка задавалась следующим образом:

$$q(t) = Q_0 (at)^2 \sin(at^2 - t_1^2) / (2 + \omega t_1) / \omega^2 \text{ — в режиме пуска,} \quad (9)$$

$$q(t) = Q_0 [\omega - b(t - t_2)]^2 \sin[\omega t - b(t - t_2)^2 / 2] / \omega^2 \text{ — в режиме остановки,} \quad (10)$$

где  $t_1$  — время начала эксплуатационного режима,

$t_2$  — время начала остановки.

Были приняты следующие значения коэффициентов, характеризующих скорость изменения нагрузки в переходных режимах:  $a = 11$  рад/с<sup>2</sup>,  $b = 3$  рад/с<sup>2</sup>.

Для системы с динамическим гасителем вертикальные перемещения масс определялись по формуле (8) при  $j = 2$  (для системы с дополнительным инерционным блоком — при  $j = 1$ ).

В качестве примера приведем формулу для перемещений второй массы (система с динамическим гасителем колебаний):

$$z_2(t) = \frac{1}{B} \int_0^t q_2(\tau) \sum_{s=1}^3 \frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 (t-\tau)}{2\omega}} \sin(p_s^* (t-\tau)) d\tau.$$

После преобразований получим

$$z_2(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot \int_0^t q_2(\tau) e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 (t-\tau)}{2\omega}} \sin(p_s^* (t-\tau)) d\tau \right].$$

Таблица 1 — Результаты расчета виброизолированных систем

| Расчетная схема виброизоляции             | Масса динамического гасителя/инерционного блока, кг | Жесткость упругих элементов под гасителем/блоком, кН/м | Амплитуда колебаний ближайшей к опорным конструкциям массы системы (эксплуатационный режим работы оборудования), мм | Амплитуда колебаний ближайшей к опорным конструкциям массы системы (переходный режим работы оборудования), мм | Коэффициент передачи (эксплуатационный режим работы оборудования), б/р | Коэффициент передачи (переходный режим работы оборудования), б/р |
|---|---|--|---|---|--|--|
| Система с традиционной виброизоляцией     | –   | –  | 1,38  | 50,94   | 0,008  | 0,291  |
| Схема с динамическим гасителем колебаний  | 500   | 4 · 10 <sup>3</sup>                                    | 1,14  | 48,43   | 0,007  | 0,277  |
|   | 647   |  | 1,08  | 47,37   | 0,006  | 0,271  |
|   | 1 000   |  | 1,69  | 44,15   | 0,010  | 0,252  |
|   | 2 000   |  | 1,56  | 25,70   | 0,009  | 0,147  |
|   | 3 000   |  | 1,56  | 41,19   | 0,009  | 0,235  |
|   | 4 000   |  | 1,57  | 51,08   | 0,009  | 0,292  |
| Схема с дополнительным инерционным блоком | 5 000   | 3,5 · 10 <sup>3</sup>                                  | 1,60  | 54,25   | 0,009  | 0,310  |
|   | 1 000   |  | 1,40  | 44,76   | 0,008  | 0,256  |
|   | 2 000   |  | 1,53  | 46,67   | 0,009  | 0,267  |
|   | 3 000   |  | 0,65  | 48,18   | 0,004  | 0,275  |
|   | 4 000   |  | 0,49  | 49,10   | 0,003  | 0,281  |
|   | 5 000   |  | 0,44  | 49,69   | 0,002  | 0,284  |

Для увеличения точности результатов и уменьшения времени счета был использован прием разделения составляющих, зависящих от  $t$  (момент времени, для которого определяется перемещение) и  $\tau$  (переменная интегрирования по времени):

$$z_2(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot [d_1(t, s) \cdot F_2(t, s) - d_2(t, s) \cdot F_1(t, s)] \right], \quad (11)$$

где  $F_1(t, s) = \int_0^t q_2(\tau) e^{\frac{\gamma_s p_s^2 \tau}{2\omega}} \sin(p_s^* \tau) d\tau$

$F_2(t, s) = \int_0^t q_2(\tau) e^{\frac{\gamma_s p_s^2 \tau}{2\omega}} \cos(p_s^* \tau) d\tau$  (12)

$d_1(t, s) = e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t); d_2(t, s) = e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \cos(p_s^* t).$

Подобно формуле (11) могут быть записаны формулы для определения вертикальных перемещений для двух других масс и второго варианта виброизоляции.

Рассмотренные выше системы были также рассчитаны методом «нормальных форм». Результаты расчетов, полученные двумя методами, полностью совпали.

Результаты анализа эффективности виброизоляции при различных ее параметрах и для двух расчетных схем приведены в табл. 1. Для сравнения приведены результаты расчета для традиционной виброизолированной системы (система с двумя степенями свободы — «оборудование + постамент»).

Коэффициент передачи, характеризующий долю динамической нагрузки, передающейся от системы на опорные конструкции, определялся по формуле:

$$\mu = \frac{k_i \cdot z_{i, \max}}{Q_0},$$

где  $k_i$  и  $z_{i, \max}$  — жесткость элементов крепления ближайшей к основанию массы и ее максимальное перемещение соответственно (в переходном или эксплуатационном режиме).

Из анализа результатов расчета был сделан вывод о том, что подобранное ранее значение массы динамического гасителя колебаний обеспечивает минимальное значение коэффициента передачи только в эксплуатационном режиме работы оборудования, однако при расчете с учетом

переходных режимов наиболее эффективной является схема с динамическим гасителем колебаний со следующими характеристиками:  $k_1 = 4 \cdot 10^3$  кН/м;  $m_1 = 2000$  кг.

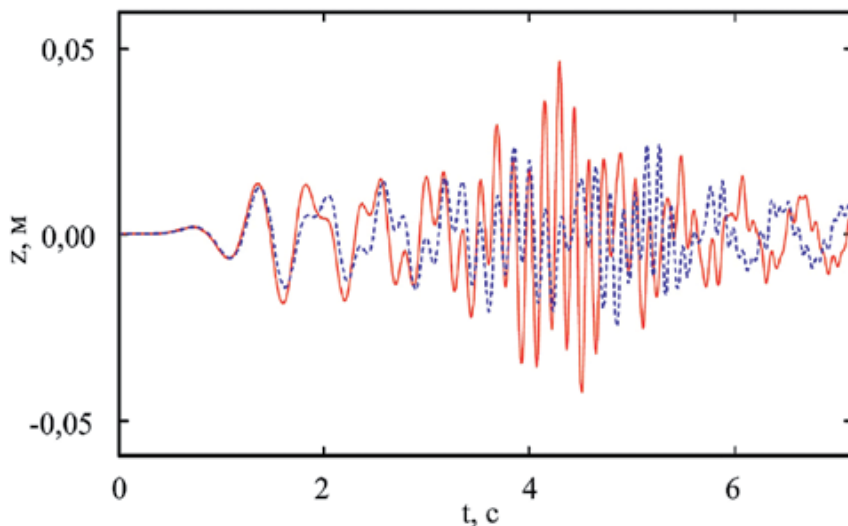
Графики вертикальных перемещений ближайшей к основанию массы для наиболее эффективной схемы виброизоляции (с динамическим гасителем колебаний)

и системы, виброизолированной по стандартной схеме, в режиме пуска и остановки оборудования приведены на рис. 2 и 3 соответственно.

Из рис. 2 и 3, а также из результатов, приведенных в табл. 1, видно, что при использовании динамического гасителя колебаний перемещения ближайшей к основанию

массы, а также нагрузка, передаваемая от системы на опорные конструкции, снижаются практически в 2 раза по сравнению со стандартной схемой виброизоляции.

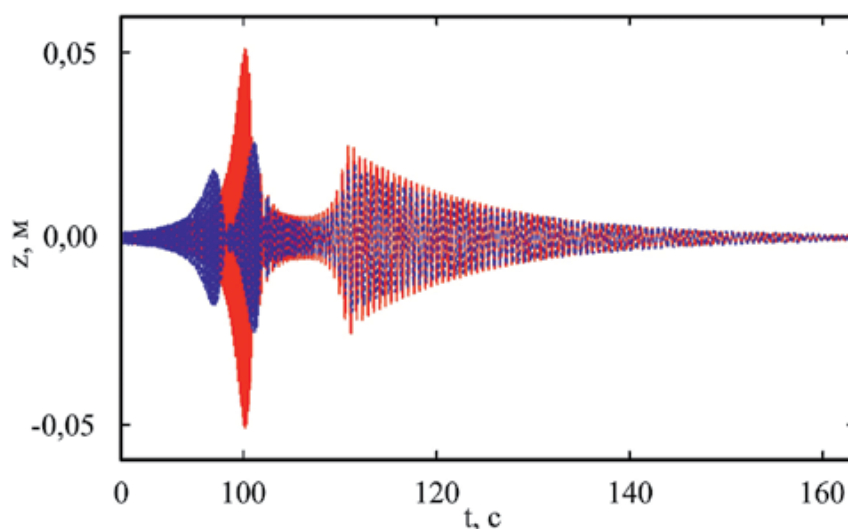
Предложенный в статье метод можно применять при расчете виброзащитных систем с тремя степенями свободы при произвольных нагрузках. Простота, устойчивость и сходимость метода позволяет использовать его при оценке эффективности различных схем виброзащиты с учетом переходных режимов.



**Рисунок 2** — Вертикальные колебания ближайшей к основанию массы системы, виброизолированной по стандартной схеме (красная сплошная линия), и системы с динамическим гасителем колебаний (синяя пунктирная линия) в режиме пуска оборудования

#### Список использованной литературы

1. Чернов Ю. Т. Вибрации строительных конструкций. (Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям): Научное издание. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство АСВ, 2011. 384 с.
2. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 470 с.
3. Осипова М. В. Расчет виброизолированных систем на динамические нагрузки с использованием передаточных функций // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. № 4. С. 18–20.



**Рисунок 3** — Вертикальные колебания ближайшей к основанию массы системы, виброизолированной по стандартной схеме (красная сплошная линия), и системы с динамическим гасителем колебаний (синяя пунктирная линия) в режиме остановки оборудования

Материалы хранятся по адресу: 109428, г. Москва, 2-я Институтская ул., д. 6 (ОАО «НИЦ «Строительство» ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко), e-mail: mariaosipova3@gmail.com