



М.В. ОСИПОВА,
инженер
ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко

МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ КАК СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

В статье представлен метод расчета виброизолированных систем, рассматриваемых как системы с тремя степенями свободы, на динамические нагрузки, возникающие в переходных режимах работы оборудования с гармоническими нагрузками. Алгоритм строится с помощью импульсных переходных функций, представляющих собой реакции системы на единичный импульс. При построении этих функций использовались зависимости для передаточных функций, полученные автором ранее. В основе алгоритма лежит метод, предложенный профессором Ю.Т. Черновым. Примеры расчета показали устойчивость и сходимость метода. Аналогичный подход можно использовать при расчете виброизолированных систем на произвольную нагрузку, используя приведенные в статье формулы для импульсных переходных функций.

Ключевые слова: виброзащита, виброизоляция, импульсная переходная функция, передаточная функция, динамический гаситель колебаний, дополнительный инерционный блок, интеграл Дюамеля, переходные режимы.

При проектировании фундаментов виброактивного оборудования с гармоническими нагрузками (грохоты, вентиляторы, дизели, металлообрабатывающие станки и др.) широко применяются методы виброзащиты, в частности виброизоляция. При подборе параметров виброизоляции такого оборудования важно оценивать ее эффективность при работе оборудования не только в стационарных, но и в переходных режимах, что в общем случае ставит задачу расчета виброизолированных систем на произвольные нагрузки.

Если оборудование, виброизолированное по стандартной схеме, можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы (например, «оборудование с динамическими нагрузками + постамент»), то при дополнительном использовании распространенных приемов виброизоляции — дополнительного инерционного блока или динамического га-

сителя колебаний, возникает необходимость расчета систем с тремя степенями свободы.

Расчетная схема системы с тремя степенями свободы представлена на рис. 1.

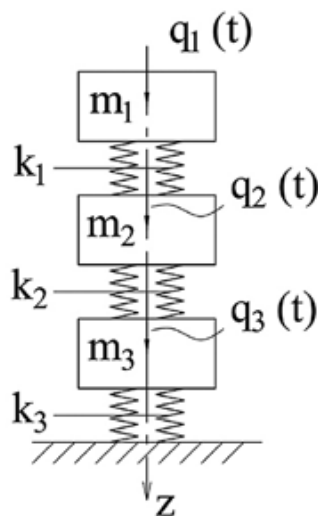


Рисунок 1 — Система с тремя степенями свободы

Решение системы уравнений движения строится с использованием импульсных переходных функций (ИПФ) в форме интегралов Дюамеля.

Формулы для импульсных переходных функций (ИПФ) были получены на основании известных соотношений между передаточными и импульсными переходными функциями для линейных динамических систем [1, 2]. В соответствии с этими соотношениями каждой составляющей передаточной функции вида

$$\frac{1}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma_s p_s} = \frac{1}{p_s^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p_s^2} + i\gamma_s \right)},$$

где p_s — частота собственных колебаний системы по s -ой форме собственных колебаний;

ω — частота внешнего воздействия;

i — «мнимая» единица;

γ_s — коэффициент демпфирования по s -ой форме, соответствует составляющая импульсной переходной функции

$$k_{us}(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}}}{p_s^*} \sin(p_s^* t), \quad (1)$$

где $p_s^* = p_s \sqrt{1 - p_s^2 (\gamma_s / (2\omega))^2}$ — собственная частота колебаний системы с учетом демпфирования.

Формулы для передаточных функций при вертикальных колебаниях систем с тремя степенями свободы были получены автором ранее [3].

Полученные в результате преобразований формулы для импульсных переходных функций имеют следующий вид:

$$k_{u11}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{[(k_1 + k_2 - m_2 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2) - k_2^2]}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (2)$$

$$k_{u12}(t) = k_{u21}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{k_1(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (3)$$

$$k_{u13}(t) = k_{u31}(t) = \frac{k_1 k_2}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{1}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (4)$$

$$k_{u22}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (5)$$

$$k_{u23}(t) = k_{u32}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{k_2(k_1 - m_1 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (6)$$

$$k_{u33}(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{[(k_1 - m_1 p_s^2)(k_1 + k_2 - m_2 p_s^2) - k_1^2]}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t), \quad (7)$$

где $B = m_1 m_2 m_3 (p_3^2 - p_2^2)(p_2^2 - p_1^2)(p_3^2 - p_1^2)$;

m_1, m_2, m_3 — инерционные характеристики системы;

k_1, k_2, k_3 — жесткостные характеристики системы;

$$R(s) = p_{1+\text{Rem}(s,3)}^2 - p_{1+\text{Rem}(s+1,3)}^2$$

$\text{Rem}(s,3)$ — остаток от деления номера собственной формы s на 3.

Для общего случая произвольного воздействия на каждую из масс системы перемещения масс системы определяются с помощью интеграла Дюамеля:

$$z_i(t) = \sum_{j=0}^3 \int_0^t q_j(\tau) k_{ij}(t-\tau) d\tau. \quad (8)$$

В качестве расчетного примера был выполнен подбор наиболее эффективной виброизолированной системы, рассматриваемой как система с тремя степенями свободы, для оборудования, установленного на постамент. Характеристики оборудования, постамент и элементов крепления следующие: масса оборудования — 10 000 кг; масса постамент — 5 000 кг; $5 \cdot 10^3$ кН/м — жесткость элементов крепления оборудования к постаменту; $2 \cdot 10^3$ кН/м — жесткость элементов крепления постамент к опорным конструкциям.

Были приняты следующие параметры внешней нагрузки: $Q_0 = 350$ кН/м и $\omega = 60$ рад/с — амплитуда и частота внешней нагрузки соответственно.

В качестве первого варианта рассматривалась система с динамическим гасителем колебаний (масса m_1 — динамический гаситель; m_2 — оборудование; m_3 — постамент). Жесткость упругих элементов гасителя принималась равной $k_1 = 4 \cdot 10^3$ кН/м; масса гасителя m_1 была определена из условия минимума динамической нагрузки, передающейся от виброизолированной системы на опорные конструкции (при эксплуатационном режиме нагрузки), по формуле $m_1 = k_1 / \omega^2 = 647$ кг.

Также были выполнены расчеты системы с гасителем для ряда других значений массы гасителя: $m_1 = 500; 1\ 000; 2\ 000; 3\ 000; 4\ 000; 5\ 000$ кг.

В качестве второго варианта виброизоляции рассматривалась система с дополнительным инерционным блоком (масса m_1 расчетной схемы — оборудование; m_2 — инерционный блок; m_3 — постамент). Жесткость упругих элементов под инерционным блоком была принята равной $k_2 = 3,5 \cdot 10^3$ кН/м. Были выполнены расчеты для ряда систем с различными массами дополнительного инерционного блока: $m_2 = 1\ 000; 2\ 000; 3\ 000; 4\ 000; 5\ 000$ кг.

Во всех расчетных схемах демпфирование учитывалось согласно модифицированной гипотезе Фойгта, значения коэффициентов демпфирования принимались равными $\gamma_s = 0,1; s = 1, 2, 3$ — номера собственных форм.

Для всех расчетных схем выполнялся расчет для эксплуатационного и переходных режимов работы оборудования. В переходных режимах работы машин внешняя нагрузка задавалась следующим образом:

$$q(t) = Q_0 (at)^2 \sin(at^2 - t_1^2) / (2 + \omega t_1) / \omega^2 \text{ — в режиме пуска,} \quad (9)$$

$$q(t) = Q_0 [\omega - b(t - t_2)]^2 \sin[\omega t - b(t - t_2)^2 / 2] / \omega^2 \text{ — в режиме остановки,} \quad (10)$$

где t_1 — время начала эксплуатационного режима,

t_2 — время начала остановки.

Были приняты следующие значения коэффициентов, характеризующих скорость изменения нагрузки в переходных режимах: $a = 11$ рад/с², $b = 3$ рад/с².

Для системы с динамическим гасителем вертикальные перемещения масс определялись по формуле (8) при $j = 2$ (для системы с дополнительным инерционным блоком — при $j = 1$).

В качестве примера приведем формулу для перемещений второй массы (система с динамическим гасителем колебаний):

$$z_2(t) = \frac{1}{B} \int_0^t q_2(\tau) \sum_{s=1}^3 \frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 (t-\tau)}{2\omega}} \sin(p_s^* (t-\tau)) d\tau.$$

После преобразований получим

$$z_2(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \left[\frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot \int_0^t q_2(\tau) e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 (t-\tau)}{2\omega}} \sin(p_s^* (t-\tau)) d\tau \right].$$

Таблица 1 — Результаты расчета виброизолированных систем

Расчетная схема виброизоляции	Масса динамического гасителя/инерционного блока, кг	Жесткость упругих элементов под гасителем/блоком, кН/м	Амплитуда колебаний ближайшей к опорным конструкциям массы системы (эксплуатационный режим работы оборудования), мм	Амплитуда колебаний ближайшей к опорным конструкциям массы системы (переходный режим работы оборудования), мм	Коэффициент передачи (эксплуатационный режим работы оборудования), б/р	Коэффициент передачи (переходный режим работы оборудования), б/р
Система с традиционной виброизоляцией	–	–	1,38	50,94	0,008	0,291
Схема с динамическим гасителем колебаний	500	4 · 10 ³	1,14	48,43	0,007	0,277
	647		1,08	47,37	0,006	0,271
	1 000		1,69	44,15	0,010	0,252
	2 000		1,56	25,70	0,009	0,147
	3 000		1,56	41,19	0,009	0,235
	4 000		1,57	51,08	0,009	0,292
Схема с дополнительным инерционным блоком	5 000	3,5 · 10 ³	1,60	54,25	0,009	0,310
	1 000		1,40	44,76	0,008	0,256
	2 000		1,53	46,67	0,009	0,267
	3 000		0,65	48,18	0,004	0,275
	4 000		0,49	49,10	0,003	0,281
5 000	0,44	49,69	0,002	0,284		

Для увеличения точности результатов и уменьшения времени счета был использован прием разделения составляющих, зависящих от t (момент времени, для которого определяется перемещение) и τ (переменная интегрирования по времени):

$$z_2(t) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^3 \left[\frac{(k_1 - m_1 p_s^2)(k_2 + k_3 - m_3 p_s^2)}{p_s^*} R(s) \cdot [d_1(t, s) \cdot F_2(t, s) - d_2(t, s) \cdot F_1(t, s)] \right], \quad (11)$$

где $F_1(t, s) = \int_0^t q_2(\tau) e^{\frac{\gamma_s p_s^2 \tau}{2\omega}} \sin(p_s^* \tau) d\tau$

$F_2(t, s) = \int_0^t q_2(\tau) e^{\frac{\gamma_s p_s^2 \tau}{2\omega}} \cos(p_s^* \tau) d\tau$ (12)

$d_1(t, s) = e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \sin(p_s^* t); d_2(t, s) = e^{-\frac{\gamma_s p_s^2 t}{2\omega}} \cos(p_s^* t).$

Подобно формуле (11) могут быть записаны формулы для определения вертикальных перемещений для двух других масс и второго варианта виброизоляции.

Рассмотренные выше системы были также рассчитаны методом «нормальных форм». Результаты расчетов, полученные двумя методами, полностью совпали.

Результаты анализа эффективности виброизоляции при различных ее параметрах и для двух расчетных схем приведены в табл. 1. Для сравнения приведены результаты расчета для традиционной виброизолированной системы (система с двумя степенями свободы — «оборудование + постамент»).

Коэффициент передачи, характеризующий долю динамической нагрузки, передающейся от системы на опорные конструкции, определялся по формуле:

$$\mu = \frac{k_i \cdot z_{i, \max}}{Q_0},$$

где k_i и $z_{i, \max}$ — жесткость элементов крепления ближайшей к основанию массы и ее максимальное перемещение соответственно (в переходном или эксплуатационном режиме).

Из анализа результатов расчета был сделан вывод о том, что подобранное ранее значение массы динамического гасителя колебаний обеспечивает минимальное значение коэффициента передачи только в эксплуатационном режиме работы оборудования, однако при расчете с учетом

переходных режимов наиболее эффективной является схема с динамическим гасителем колебаний со следующими характеристиками: $k_1 = 4 \cdot 10^3$ кН/м; $m_1 = 2000$ кг.

Графики вертикальных перемещений ближайшей к основанию массы для наиболее эффективной схемы виброизоляции (с динамическим гасителем колебаний)

и системы, виброизолированной по стандартной схеме, в режиме пуска и остановки оборудования приведены на рис. 2 и 3 соответственно.

Из рис. 2 и 3, а также из результатов, приведенных в табл. 1, видно, что при использовании динамического гасителя колебаний перемещения ближайшей к основанию

массы, а также нагрузка, передаваемая от системы на опорные конструкции, снижаются практически в 2 раза по сравнению со стандартной схемой виброизоляции.

Предложенный в статье метод можно применять при расчете виброзащитных систем с тремя степенями свободы при произвольных нагрузках. Простота, устойчивость и сходимость метода позволяет использовать его при оценке эффективности различных схем виброзащиты с учетом переходных режимов.

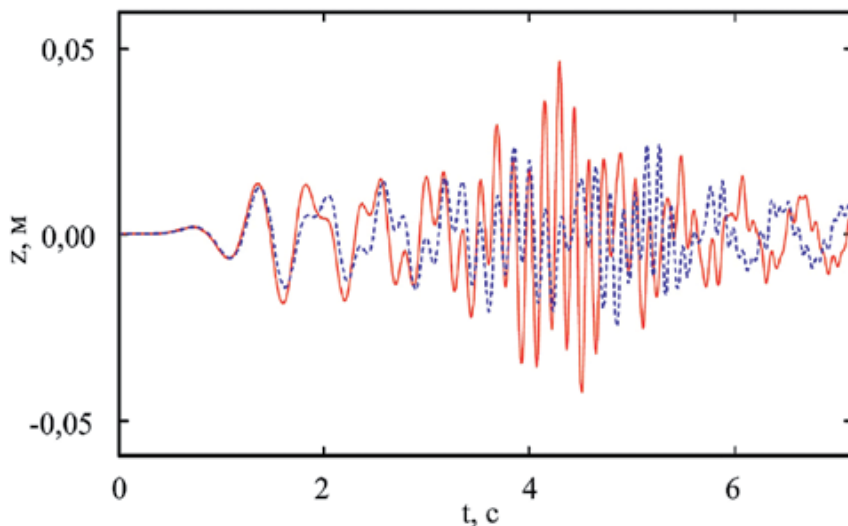


Рисунок 2 — Вертикальные колебания ближайшей к основанию массы системы, виброизолированной по стандартной схеме (красная сплошная линия), и системы с динамическим гасителем колебаний (синяя пунктирная линия) в режиме пуска оборудования

Список использованной литературы

1. Чернов Ю. Т. *Вибрации строительных конструкций. (Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям): Научное издание. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство АСВ, 2011. 384 с.*
2. Солодовников В. В. *Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 470 с.*
3. Осипова М. В. *Расчет виброизолированных систем на динамические нагрузки с использованием передаточных функций // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. № 4. С. 18–20.*

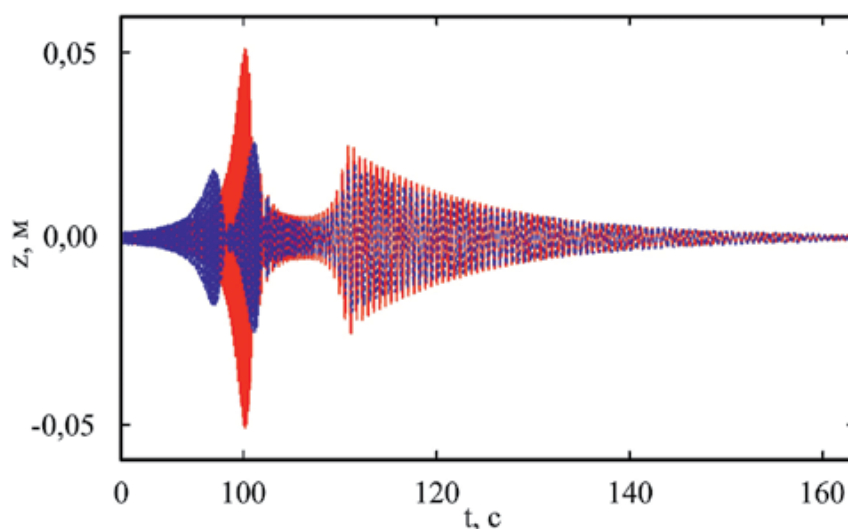


Рисунок 3 — Вертикальные колебания ближайшей к основанию массы системы, виброизолированной по стандартной схеме (красная сплошная линия), и системы с динамическим гасителем колебаний (синяя пунктирная линия) в режиме остановки оборудования

Материалы хранятся по адресу:
109428, г. Москва, 2-я Институтская ул., д. 6
(ОАО «НИЦ «Строительство» ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко),
e-mail: mariaosipova3@gmail.com